آنتونی زیگموند

ملاحظاتی در باب سرگذشت سریهای فوریه•

ترجمهٔ سعید ذاکری

۱. سرآغاز

تصمیم گرفته‌ام که دربارهٔ برخی پیشرفتها در نظریهٔ سریهای مثلثاتی در نیمهٔ اول قرن بیستم صحبت کنم[۱]، اما برای این‌کار مجبورم نخست به‌قرن نوزدهم برگردم (که می‌توان آن را توفیقی اجباری انگاشت). سخن خودرا باچند مفهوم مقدماتی آغاز می‌کنم.

بنا به‌تعریف، یك سری مثلثاتی عبارت است از یك ترکیب خطی نامتناهی از جملات نمایی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

اگرقرار باشد این سری چیزی را نمایش دهد، قبل‌از هرچیز نمایشگر تابعی چون $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π خواهدبود

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

دلایل متعددی برای مطالعهٔ سریهای مثلثاتی وجود دارد؛ یك دلیل آن است که این موضوع به‌خودی خود مبحثی جالب و مهم است؛ دلیل دیگرآنکه از روشهایی که در اینجا به‌کار می‌رود می‌توان در بسیاری مسائل دیگراستفاده کرد. سریهای مثلثاتی هستهٔ اصلی این کاربردها را تشکیل می‌دهند، لکن بررسی آنها به‌مباحث فرعی زیادی می‌انجامد.

• Zygmund, Antoni, "Notes on the history of Fourier series," *Studies in Harmonic Analysis*, MAA, 1979, 1-19.

۱. این مقاله برگرفته از یك سخنرانی پروفسور زیگموند است.

برخی‌از این‌گسترشها نسبتاً ساده‌اند، و بعضی دیگرمشکلتر. ازمیان ساده‌ترها می‌توان به‌عنوان مثال تعمیم سریهای مثلثاتی به‌انتگرالهای مثلثاتی را درنظر گرفت، که درآن‌جای جمعبندی را انتگرالگیری نسبت به یك متغیر پیوسته می‌گیرد. اما تعمیمهای دیگر به این سادگی نیستند. مثلا دراین سخنرانی راجع به‌سریهای چندگانهٔ مثلثاتی چیزی نخواهم گفت. درگذار ازیك متغیر به‌چند متغیر، برخی نتایج به‌طورخودکار به‌دست می‌آیند، لکن قضایای دیگری هستند که بسیار دشوارترند. واقعیت امر این است‌که امروزه بسیاری ازجالبترین مسائل این‌مبحث به‌حالت چندمتغیره‌مربوط می‌شود، ودرحال حاضرحالت یك متغیره را می‌توان تاحد زیادی یك مبحث قدیمی و کهنه انگاشت.

فرض‌کنیم تابع مشخصی مانند $f(x)$ را، که $f(x+2\pi)=f(x)$، با یك سری مثلثاتی نمایش داده باشیم

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (1)$$

با دردست داشتن این نمایش، می‌توان ضرایب c_m را به‌طورصوری تعیین‌کرد، به‌این‌طریق که معادلهٔ بالارا در e^{-imx} ضرب‌کنیم وازحاصل روی‌بازه‌ای به‌طول 2π، مثلاً، $(0,2\pi)$، انتگرال بگیریم

$$c_m=c_m(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-imx}dx \qquad (2)$$

به‌عکس، با در دست داشتن تابع $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π، می‌توان ضرایب فوریهٔ آن ــ $c_n=c_n(f)$ ــ را به‌یاری معادلهٔ (۲) تعریف‌کرد وسپس سری (۱) را، که بنا به‌تعریف سری فوریهٔ تابع $f(x)$ است، تشکیل داد.

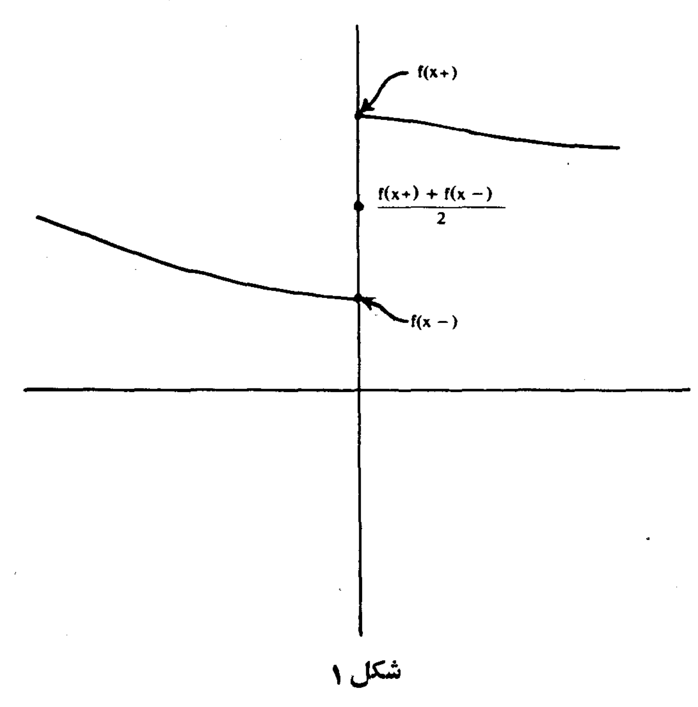
مسئلهٔ اصلی در اینجا این است: تابع f را داده‌اند. $c_n(f)$ را به طریق گفته‌شده تعیین‌کرده‌ایم وسری فوریه را تشکیل داده‌ایم. تحت چه شرایطی‌این‌سری‌تابع f رانمایش می‌دهد؟ این پرسش درحقیقت مسئلهٔ اساسی نظریهٔ مورد بحث است. نخستین‌گامهای صوری دراین زمینه را باید ازآن اویلر و فوریه دانست، اما روشن است‌که این مبحث پیش‌ازآن نیز درارتباط با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سابقه داشته‌است، که من اینجا وارد این موضوع نمی‌شوم. گفتم‌که اویلر و فوریه پیشگامان این نظریه، و آن‌هم عمدتاً جنبه‌های صوریش، بوده‌اند. اما هنگامی‌که به‌قرن نوزدهم می‌رسیم، به‌پیشرفتهای مهم ونامهای‌بزرگی برمی‌خوریم. بگذارید سه‌نام را که معرف پیشرفتهای چشمگیر این دوره‌اند ذکر کنم. اولی دیریکله است، دومی ریمان، وسومی کانتور. این سه تن اصلیترین نظریه‌پردازان این‌مبحث در قرن نوزدهم‌اند.

نخست باید بپرسیم که سهم عمدهٔ دیریکله در این بین چیست؟ او اولین ریاضیدانی بودکه دربارهٔ صحت نمایش یك تابع به‌کمك سری فوریه‌اش به‌مطالعه پرداخت. البته او تنها مسئلهٔ همگرایی سری را درنظر گرفت. او در رساله‌اش ــ حدود ۱۸۳۷ــ نشان دادکه

اگر تابع موردنظر ساختارخیلی‌ساده‌ای داشته‌باشد، درواقع اگر نمودارآن‌را بتوان به‌تعدادی متناهی منحنی یکنوا تفکیك کرد، آنگاه سری واقعاً همگراست و واقعاً تابع f را نمایش می‌دهد. به‌بیان ملموستر، دنبالهٔ

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$$

درهر نقطه به‌میانگین حدود چپ وراست f میل می‌کند (شکل ۱).



شکل ۱

این‌همان چیزی است که اصطلاحاً آزمون دیریکله برای همگرایی سری‌فوریه‌خوانده می‌شود. گاهی‌آن‌را آزمون دیریکله-ژوردان هم می‌گویند، واین به‌خاطرقضیهٔ‌ژوردان است که می‌گوید هرتابع با تغییرکراندار تفاضل دوتابع یکنواست، وبنابراین خودبه‌خود سری فوریه‌ای همه‌جا همگرا دارد. اما با وجود این، آزمون فوق را اساساً ازآن دیریکله می‌شناسند. ازنظرگاه تاریخی، این اولین‌آزمون همگرایی است. بعدها ـ به‌ویژه دراواخرقرن نوزدهم ـ به‌سیلی ازمقالات دراین‌باره برمی‌خوریم. برخی‌ازنتایج این‌مقالات بااهمیت‌اند، لکن‌آزمون بالا نتیجه‌ای مقدماتی است.

ضمناً در همین زمان است‌که مفهوم تابع، به شکلی‌که امروزه درکتابهای حساب دیفرانسیل وانتگرال می‌بینیم، معرفی می‌شود. پیش از این زمان، تابع را چیزی می‌دانستند

که بتواند با یك عبارت تحلیلی یا یك منحنی هندسی تعریف شود. بگذارید دراینجا حکایتی را به‌عنوان جملهٔ معترضه نقل کنم. من در پیشگفتار کتابم [۲] خاطرنشان کرده‌ام که نظـریهٔ سریهای مثلثاتی تأثیر قابل توجهی بر پیشرفت آنالیز داشته است. درآنجا من از دیریکله در ارتباط با مفهوم تابع نام برده‌ام؛ پس از آن از ریمان یادکرده‌ام که در آن مقالهٔ مفصلش، که اثر اساسی او درباب سریهای مثلثاتی است، مفهوم انتگرالش را معرفی کرد؛ و نیز نـام کانتور را آورده‌ام که اولین کسی بودکه به‌مطالعهٔ مجموعه‌های یکتایی پرداخت (دراین باره بعداً صحبت خواهم کرد) و تلاشش برای سرشت‌نمایی آنها، که هنوزمسئله‌ای حل نشده است، او را به‌گسترش نظـریهٔ مجموعه‌ها هدایت کرد. پس از انتشار کتاب، گفتگویی با یکی از ریاضیدانهای برجسته داشتم، واو مرا متهم به‌تفکر امپریالیستی درریاضیات کرد. ممکن است تا حدودی هم چنین بوده باشد، چراکه در همهٔ ما مایه‌ای از احساس مالکیت وجود دارد.

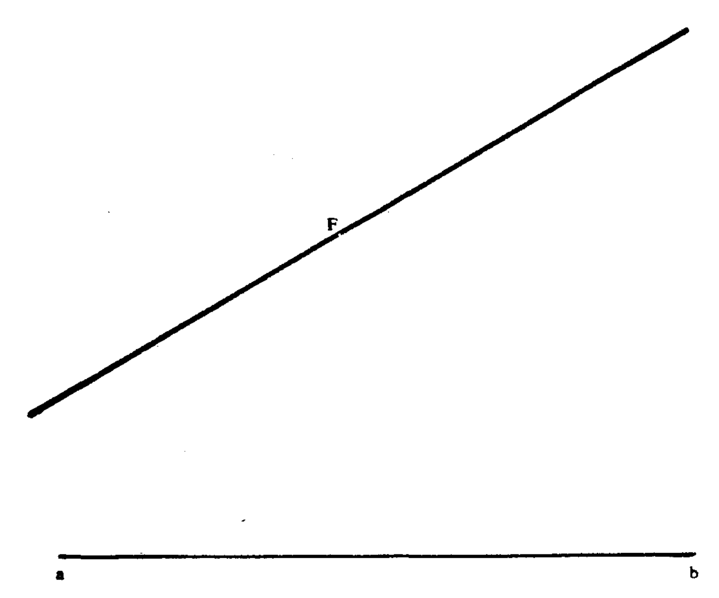
درسالهای بین ۱۸۵۰ تا ۱۸۶۰ سروکلهٔ رسالهٔ ریمان دربارهٔ سریهای مثلثاتی پیدا شد، واین اثری بسیار برجسته وقابل توجه بود، زیرا برخی از روشهایی‌که او دراین‌رساله معرفی‌کرد، هرچندکه امروزه توسعه یافته‌اند، هنوز هم در بررسی سریهای مثلثاتی‌کلی‌کنار گذاشته نشده‌اند. خوب، نتایج اصلی‌ای‌که ریمان به‌دست‌آورد چه بود؟ اول‌ازهمه اوچیزی را ثابت‌کـردکه اصطلاحاً لم ریمان-لبگ خـوانده می‌شود: به‌ازای هر تابع انتگرالپذیر $f(x)$، وقتی $|n|\to\infty$، ضرایب $c_n(f)$ به ۰ میل می‌کنند. این قضیه‌ای بسیار مقدماتی و در عین‌حال بسیار اساسی است. از آن جهت آن را لم ریمان-لبگ می‌خوانندکه بعدها لبگ این نتیجه را به‌گونه‌ای از انتگرالهـا که خـود ابداع کـرده بود تعمیم داد. اینکه $c_n(f)\to 0$، تنها یکی‌از دستاوردهای ریمان است. مطلب عجیب‌آنکه قضایای عمدهٔ ریمان با سریهای مثلثاتی‌کلی (که لزوماً سری فوریه نیستند) سروکار دارد. دراینجـا مایلم یکی از این قضایا را بیان‌کنم. فرض‌کنیم یك سری مثلثاتی $\sum c_n e^{inx}$ داشته باشیم. ریمان نخستین کسی بودکه به‌یك‌چنین سری‌کلی، نوعی تابع نسبت داد. مثلا فرض‌کنیم‌که c_n به‌صفر میل کند، یا صرفاً دنبالهٔ c_nها کراندار باشد. ریمان اولین کسی بودکه از چنین سریی به‌طور صوری انتگرال گـرفت. فرض‌کنیم از سری دوبار انتگرال‌گـرفته و مجموع را $F(x)$ نامیده‌ایم

$$c_0\frac{x^2}{2}+\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_n}{(in)^2}e^{inx}=F(x)$$

که درآن ازجملهٔ مرکزی، $n=0$، جداگانه انتگرال‌گرفته شده‌است. (علامت پریم نشانگر حذف همین جمله است.) ریمان این قضیه را ثابت‌کرد: هرگاه $S_n(x_0)$ به c میل‌کند، و هرگاه تابع $F(x)$ را تشکیل دهیم و مشتق دوم تعمیم‌یافتهٔ‌آن (که امروزه مشتق شوارتز یـا ریمان-شوارتز نامیده می‌شود)، یعنی

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$$

را درنظر بگیریم، آنگاه این مشتق در $x_\circ$ موجود و برابر c است. این نتیجه را قضیهٔ اول ریمان می‌گویند. اهمیت این قضیه درچیست؟ پاسخ این است که به اعتقاد بعضیها این قضیه منشاء نظریهٔ توزیع است، چرا که به‌یك‌سری مثلثاتی کاملا دلخواه تابع‌خوش‌تعریف‌پیوسته‌ای مربوط می‌کندکه ارتباطش با سری اصلی از طریق مشتقگیری است. پس به‌عنوان مثال اگر سری مورد نظرما در بازه‌ای چون (a,b) به‌صفر میل کند، آنگاه تابع F در این بازه مشتق دوم شوارتزی برابرصفردارد، و در چنین حالتی بنابریك حکم مشهور F براین بازه تابعی خطی خواهد بود [۲، ج ۱، ص ۲۳] (شکل ۲).



شکل ۲

قضیه‌ای دیگراز ریمان دراین باره هست‌که اهمیتش‌کمترواضح است؛ این قضیه می‌گویدکه اگرصرفاً فرض‌کنیم c_n به ۰ میل‌کند، آنگاه در هرنقطهٔ x تابع F در رابطهٔ زیر صدق خواهدکرد

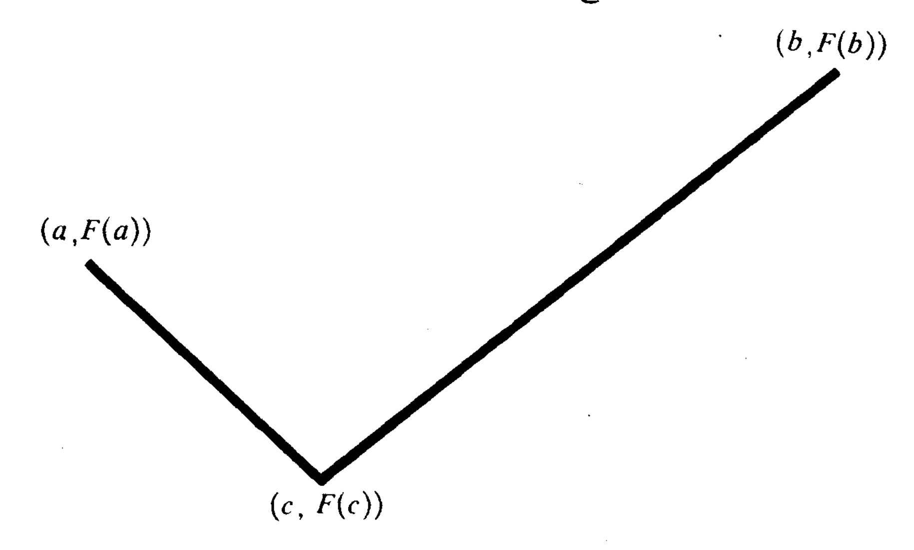
$$\lim_{h\to\circ}\frac{F(x+h)+F(x-h)-\text{۲}F(x)}{h}=\circ \qquad (\text{۳})$$

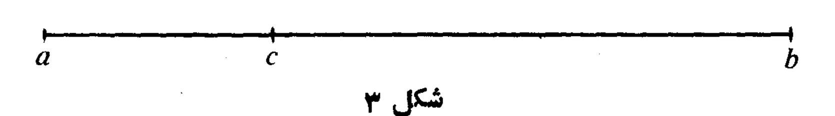
معنی رابطهٔ (۳) چیست؟ این رابطه را می‌توان به‌شکل

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\frac{F(x)-F(x-h)}{h}\longrightarrow\circ$$

نیز نوشت. به‌عبارت دیگر، صرفاً با فرض‌کردن اینکه $c_n \to 0$، تابع F به‌مفهوم فنی زیر هموار خواهد بود: خارج‌قسمتهای تفاضلی ازسمت راست‌وچپ دقیقاً یکسان رفتارمی‌کنند و تفاضلشان به‌صفر می‌گراید. خوب، اینها کارهای عمدهٔ ریمان دراین زمینه بود، اما این‌کارها نتایج فزاینده‌ای دربرداشت‌که خود ریمان عامل توسعهٔ آنها نبود. این‌نتایج را باید اساساً مرهون کانتور وشوارتز دانست.

چیزی‌که قصد دارم دربارهٔ کارهای‌کانتور بگویم، این حقیقت است: فرض‌کنیم سری مورد نظر دربازه‌ای چون (a,b)، مگراحتمالاً درنقطهٔ c، به ۰ میل‌کند. دربارهٔ این سری‌چه می‌توان حکم‌کرد؟ از آنچه‌که پیشتر گفتیم نتیجه می‌گیریم که تابع F از a تا c، ونیز از c تا b خطی است (شکل ۳)، اما ممکن است درنقطهٔ $(c,F(c))$ دارای گوشهٔ تیز باشد. لکن قضیهٔ دوم ریمان نشان می‌دهدکه چنین‌گوشهٔ تیزی امکان‌پذیر نیست. به‌عبارت دیگر، دوپاره‌خط $\overline{(a,F(a))(c,F(c))}$ و $\overline{(c,F(c))(b,F(b))}$ در امتداد یکدیگرند؛ یعنی تابع F برکل بازهٔ (a,b) خطی است. کانتور به‌مسئلهٔ یکتایی سریهای مثلثاتی علاقه‌مند بود. به‌بیان دیگر، او این مسئله را در نظرگرفت: فرض‌کنیم سری مثلثاتی $T=\sum c_n e^{inx}$ همه‌جا به ۰ میل‌کند. قضیهٔ اول ریمان به‌سادگی‌نشان می‌دهدکه ضرایب سری باید همگی برابر ۰ باشند. چرا؟ خوب، به‌خاطر اینکه تابع Fی‌که با دوبار انتگرالگیری صوری به‌دست می‌آید خطی





شکل ۳

است، وازاینجا به‌سهولت نتیجه می‌شود که همهٔ ضرایب باید برابر با صفر باشند [۲، ج ۱، ص ۳۲۶]. دراینجا بود که کانتور این سؤال را ازخود پرسید: اگرفرض کنیم سری همه‌جا بر $[0,2\pi]$، مگر احتمالاً در نقطهٔ c، به صفر میل کند، چه می‌توان حکم کرد؟ او با استدلالی که دربالا به‌کمك خطوط گفتیم به‌سرعت دریافت که سری T درنقطهٔ c، و بنابراین همه‌جا، به ۰ می‌گراید. واضح است که اگر به‌جای يك‌نقطه، تعدادی متناهی‌نقطه داشته‌باشیم، همین حکم برقرارخواهدبود. پس، به‌بیان دیگر، هرمجموعهٔ متناهی از نقاط يك مجموعهٔ یکتایی است ــ بدین‌معنی که اگر سری خارج این مجموعه به ۰ میل کند، آنگاه خود به‌خود متحد با صفرخواهدبود.

واما گام بعد: فرض کنیم مجموعهٔ استثنای ما، که تاآنجاکه به‌همگرایی سری مربوط می‌شود چیزی راجع به‌آن نمی‌دانیم، يك وتنها يك‌نقطهٔ انباشتگی داشته‌باشد. درچنین‌حالتی دربارهٔ سری چه می‌توان گفت؟ پاسخ این است که سری همچنان متحد با صفر است، زیرا می‌توانیم همهٔ نقاط مجزای این مجموعه را یکی یکی برداریم تاکه فقط‌آن يك نقطهٔ حدی باقی بماند، که آن‌را نیز به‌نوبهٔ خود می‌توان حذف کرد. بدیهی است که چنین استدلالی را می‌توان تکرار کرد. فرض کنیم يك سری مثلثاتی T داریم که همه‌جا به ۰ می‌گراید، مگــر احتمالاً درنقاط مجموعه‌ای که می‌توان آن‌را يك مجموعهٔ متناهیاً ساده‌شدنی ازنقاط خواند، یعنی مجموعه‌ای کــه با تعدادی متناهی‌بار به‌کار بستن روش حذف بــالا مآلاً افنا شود. در چنین حالتی ابتدا همهٔ نقاط مجزا را حذف می‌کنیم، سپس‌آن نقاطی از مجموعهٔ حاصل را حذف می‌کنیم که درجریان حذف مرحلهٔ نخست مبدل به‌نقطهٔ مجزا شده‌اند، وبا ادامهٔاین‌کار تمام نقاط مجموعه را حذف می‌کنیم. این نشان می‌دهد که هرمجموعهٔ متناهیاً ساده‌شدنی يك مجموعهٔ یکتایی است. و همین‌جا نقطهٔ آغاز نظریهٔ مجموعه‌هاست. کانتور از خودش پرسید که درحالت‌کلی ساختار مجموعهٔ یکتایی چگونه است؟ (مجموعهٔ یکتایی دارای‌این ویژگی است‌که همگرایی سری به ۰ درخارج‌آن ایجاب می‌کندکه سری متحد باصفر باشد.) این مسئله هنوز هم حل نشده است. اما درآن مقطع زمانی ــ همان‌گونه که این روزها عقیده‌ای متداول است ــ نظریهٔ مجموعه‌ها و اعداد فرامتناهی حقیقتاً قد علم‌کردند، چرا که فــرایند بالا به‌وضوح منجر به‌مفهوم اعداد فرامتناهی می‌شود، واین اعداد اصلا به‌همین خاطر معرفی شدند.

مایلم دراینجا فرمول‌کلاسیك دیریکله را برای مجموع جزئی سری فوریه یادآوری کنم

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt \qquad (۴)$$

که درآن $D_n(t)$ هستهٔ دیریکله است

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

توجه کنیم که با چشم‌پوشی از ۱/۲ در $\sin(n+۱/۲)t$ و درنظر گرفتن جملهٔ $۱/(۲\sin t/۲)$ با تابع f، $S_n(x)$ به‌طور صوری برابرضریب فوریهٔ (سینوسی) تابع $f(x+t)/(۲\sin t/۲)$ خواهد بود. این حقیقت فوق‌العاده مهمی است، زیرا به‌کمك آن و با استفاده ازقضیهٔ ریمان درباب میل ضرایب به ۰ می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت‌که هرگاه تابع f دربازهٔ (a,b) صفر باشد، آنگاه مجموع جزئی nام آن، یعنی $S_n(x)$، در (a,b) به ۰ میل خواهدکرد. به‌ویژه، اگر دوتابع دربازه‌ای با یکدیگر برابر باشند، آنگاه سریهای فوریه‌شان در آن‌بازه دقیقاً مثل هم رفتار خواهند کرد. در چنین حالتی می‌گوییم‌که این دو سری فوریه همانگرا[1] هستند، یعنی در آن بازه اختلاف بین مجموعهای جزئی آنها به ۰ می‌گراید.

مسائل سریهای فوریه همچنین منجر به‌بررسی انتگرال

$$-\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{۲\tan t/۲}\,dt \qquad (۵)$$

می‌شود، که شباهتش به‌انتگرال رابطهٔ (۴) آشکاراست. انتگرال (۵)، که با

$$-\frac{۱}{\pi}\lim_{h\to ۰}\left(\int_{-\pi}^{-h}+\int_{h}^{\pi}\right)\frac{f(x+t)}{۲\tan t/۲}\,dt$$

تعریف می‌شود، مزدوج $f(x)$ نام دارد ومعمولا به $\tilde{f}(x)$ نشان داده می‌شود.[2] این تابع نقش مهمی درنظریهٔ سریهای فوریه دارد و آنرا باچیزی‌که اصطلاحاً سری مزدوج خوانده می‌شود نمایش می‌دهند

$$\sum^{\infty} c_n(-i\operatorname{sgn} n)e^{inx} \text{ ، که در آن } \operatorname{sgn} n=\begin{cases} ۱, & n>۰\\ ۰, & n=۰\\ -۱, & n<۰\end{cases}$$

صحبتهایم در مورد قرن نوزدهم دراینجا عملا به‌پایان رسیده است. اما چند پیشرفت دیگردراین زمینه بوده‌است‌که تنها یکی‌ازآنها را خواهم‌گفت. می‌دانیم‌که سری فوریه یك تابع پیوسته می‌تواند واگرا باشد. این مطلب را دوبوا ریمون[3] در ۱۸۷۶ به‌دست آورد. او نخستین‌کسی بود که نشان داد تابع پیوسته‌ای وجود داردکه سری فوریه‌اش در نقطه‌ای

---

1. equiconvergent

۲. توجه کنیدکه تابع مزدوج درحقیقت همان «تبدیل‌هیلبرت» یك تابع متناوب است.ـم.

3. DuBois Reymond

واگراست، ودرواقع، می‌تواند حتی دربینهایت نقطه واگرا شود. این اکتشاف آنالیزدانهای آن زمان راکاملا مبهوت کرد، زیرا در آن زمان تصورناچیزی درمورد جمعپذیری سریهای فوریه داشتند.

هنگامی‌که قدم به‌قرن بیستم می‌گذاریم، به‌دوپیشرفت عظیم برمی‌خوریم. یکی ازآنها ابداع نظریهٔ اندازه و انتگرال توسط لبگ است. لبگ نظریـهٔ سریهای فوریه را برمبنای مفهوم انتگرال جدیدش بازسازی‌کرد وتعدادی ازقضایای مشهور را به‌حالت‌کلیتری‌که در نظرگرفته بود تعمیم داد. پیشرفت دیگر، مفهوم جمعپذیـری سریهای فوریه بود. این مفهوم اساساً ازیك حالت خیلی خاص، یعنی پژوهشهای فیِر[1] دربررسی حدود میانگین مجموعهای جزئی

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$$

به‌وجودآمد. البته نمایش $f(x)$ با انتگرال پواسون‌آن نیز به‌مفهوم به‌کاربستن نوعی روش جمعپذیری برروی سری‌فوریهٔ $f(x)$ است، وبا وجوداینکه این مطلب حتی پیش‌ازکارهای فیر شناخته شده بود، تصورجامعی ازمفهوم جمعپذیری درآن زمان وجود نداشت، ومی‌توان گفت بر اهمیت انتگرال پواسون تنها از دیدگاه نظریهٔ توابع تأکید می‌شد. ازآنجاکه σ_n ارتباط نـاچیزی بـا نظریـهٔ توابع دارد، قضیهٔ فیر را بایـد عامل مطرح شدن مفهوم‌کلی جمعپذیری دانست.

این دوپیشرفت، یعنی نظریهٔ اندازه وانتگرال‌لبگ وجمعپذیری‌سریها، سیمای‌سریهای فوریه را به‌کلی دگرگون کرد. من در اینجا قصد ندارم هیچ نتیجهٔ خاصی را ذکرکنم، اما می‌دانیدکه با به‌کارگیری روشهای جمعپذیری می‌توان به‌نظریهٔ سریهای‌فوریه، حتی‌ازبرخی جنبه‌های زیبایی‌شناختی، سامان بخشید. وکسانی بوده‌اند که چنین‌کاری‌کردند. بگذارید تنها دوسه نفرازآنها را نام ببرم. نخست باید از دولا واله پوسن[2] وفاتو[3] نام برد،که بازسازی نظریهٔ سریهـای فوریه بـرمبنای انتگرال لبگ را اساساً تکمیل کردنـد. همچنین باید از و. ه. یانگ[4] یادکنیم‌که ثابت‌کردهرمجموعهٔ شمارشپذیر با هرساختاری‌که داشته باشد یك مجموعهٔ یکتایی است، وبدین ترتیب‌کار استقرای فرامتناهی را یکسره‌کرد. اما روشهایی‌که دراینجا به‌کاربسته می‌شد، بازهم دراساس ادامهٔ روشهایی بودکه لبگ ازآنها استفاده‌کرده بود. این وضعیت، تا آنجاکه به‌سریهای فوریه مربوط می‌شود، کم و بیش تا تقریباً دهـهٔ ۱۹۲۰ ادامه داشت.

پیشرفتهای جدیدتر در قرن بیستم را با یك مرور سریع آغاز می‌کنم.

پیش‌ازهمه، باید ازهاردی و لیتلوود نام برد ــ‌که به‌رغم تلفظ مجزای نامهایشان، در

---

1. Fejér 2. de la Vallée-Poussin 3. Fatou
4. W. H. Young

این مبحث یك نـام واحد بـه‌شمارمی‌آیند. هاردی و لیتلوود عملا چیزی دراین‌زمینه برای بررسی باقی‌نگذاشتند. این دو با به‌کارگیری ایده‌های کلاسیك، هرچیزی راکه می‌شد بدون فراتر رفتن از این ایده‌ها ثابت‌کرد، ثابت‌کردند. (لکن بعدها خودشان پا را ازاین ایده‌ها فراتر گذاشتند. با بخش ۶ در زیرمقایسه‌کنید.) پس از این‌دو به‌کولموگوروف می‌رسیم‌که نشان داد تابع انتگرالپذیری وجود دارد کـه سری فوریه‌اش همه‌جا واگراست. البته این نتیجه مؤیـد اهمیت جمعپذیری درنظریهٔ سریهای فوریـه‌گردید. چندین ریاضیدان برجستهٔ دیگر نیز دراین زمینه‌کارکرده‌اند، اما از این میان مایلم دونفر را نام ببرم‌کـه تأثیرقـابل ملاحظه‌ای برجای‌گذاشته‌اند، هرچندکه اهمیت‌کارهای‌آنها تنها پس ازمرگ زود هنگامشان روشن‌شد. یکی‌ازاین‌دو پالی[1] ودیگری مارکینکیویچ[2] است. پالی به‌اتفاق هاردی ولیتلوود با معرفی برخی دیدگاههای جدیدکه بعضاً مبتنی برروشهای به‌اصطلاح مختلط بودند، نتایج قبلی این مبحث را تعمیم داد. اهمیت‌کارهای مارکینکیویچ را محتملا نمی‌توان با یادآوری قضایای خاص به‌قدرکافی توضیح داد. هرچندکه او قضایایی اساسی به‌دست‌آورد، و مسائل دشواری را حل‌کرد، سهم عمدهٔ او درابداع روشهای تازه بود. فکرمی‌کنم او بینش هندسی بسیار روشنی داشت. به‌گمانم این احساس درمن هست‌که روشهای اوهنوز هم اهمیت خود را ازدست نداده است.

اکنون به‌پیشرفتهای قرن بیستم درچندین زمینه می‌پردازیم.

۲. توابع مزدوج

اینکه به‌ازای هر f در L^2 تابـع مزدوج $\tilde{f}(x)$ تقریبـاً همه‌جـا وجـود دارد، نتیجه‌ای قدیمی از آن لوزین[3] است. وجود $\tilde{f}$ به‌ازای یك تابع انتگرالپذیر دلخواه f حکمی است که پریوالوف[4] آن را ثابت‌کرد. به‌عبارت دیگر، این حکم می‌گویدکه مقدار اصلی انتگرال تعریف کنندهٔ $\tilde{f}$، به‌ازای یك تابع دلخواه انتگرالپذیر به‌مفهوم لبگ، دارای معنی است.[5]

این حقیقت اساسی را مدیون مـارسل ریس[6] هستیم که در ۱۹۲۷ ثابت‌کرد هرگاه $f(x)$ در L^p، $1<p<\infty$، باشد، آنگاه $\tilde{f}(x)$ نیز در L^p است و

1. Paley 2. Marcinkiewicz 3. Lusin

4. Privalov

۵. به‌عبارت دقیق، پریوالوف ثابت‌کردکه هرگاه $f\in L^p[0,2\pi]$، که $1\le p<\infty$ ، آنگاه $\tilde{f}$ تقریباًهمه‌جا وجود دارد. برای دیدن اثباتی براین‌قضیه، وچند قضیهٔمربوط به‌آن‌که نویسنده دراین بخش به‌آنها اشاره می‌کند، به‌کتاب

Butzer, P.L., Nessel, R.J. *Fourier Analysis and Approximation*, Birkhauser Verlag, 1971 Vol I , 335-336.

رجوع کنید.ـم.

6. Marcel Riesz

$$\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \qquad (۶)$$

که درآن A_p تنها وابسته به p است. (البته حالت $p=۲$ از پیش شناخته شده بود. این نتیجهٔ بلافصلی ازقضیهٔ پارسوال[1] است که دربخش ۵ زیر به آن اشاره می‌کنیم.) از (۶) به‌سادگی نتیجه می‌شود که دنبالهٔ مجموعهای جزئی $S_n[f]$ نسبت به‌متریك L^p به f میل می‌کند

$$\|S_n - f\|_p \to ۰ \quad \text{هرگاه} \quad n \to \infty \qquad (۷)$$

(همچنین به‌طورهم زمان نتیجه می‌گیریم که $\|\tilde{S}_n - \tilde{f}\|_p \to ۰$، که درآن $\tilde{S}_n$ نمایانگر مجموع جزئی سری مزدوج است.)

نامساوی (۶) به‌ازای $p=۱$ یا $p=\infty$ برقرار نیست. شایسته است برای حالت $p=۱$ تذکرمخصوصی بدهیم، چون‌که این مورد به مفهوم بسیارمهم انتگرالپذیری ضعیف منجرمی‌شود. کولموگوروف (۱۹۲۲) نشان داده است که هرچند $\tilde{f}(x)$ لزوماً انتگرالپذیر نیست، خاصیت ضعیفتری دارد و آن‌اینکه مجموعهٔ‌نقاطی چون x به‌طوری‌که $|\tilde{f}(x)|>y$ دارای اندازه‌ای است کمتر از مضرب ثابتی از $\|f\|_۱/y$.

۳. روشهای مختلط

در این باب باید بار دیگر از یك نام دسته جمعی یاد کنم: مکتب روسی. البته دسته جمعی بودن نامها دراینجا کاملا تصادفی است. اما ببینیم مکتب روسی چیست؟ مکتب روسی اساساً دست‌پروردهٔ لوزین بود. او شاگردان بسیار مبرزی داشت. یکی از آنها کولموگوروف بودکه همین‌حالا از اونام بردیم. جز او افرادی چون منشوف[2]، پریوالوف، وچند نفردیگر هم بودند. شاید بپرسید که اهمیت مکتب روسی درچیست، و رهیافت آنان چگونه بود. پاسخ‌آن است که‌آنها روش به اصطلاح مختلط را توسعه دادند، یعنی این روش‌که به‌یك سری مثلثاتی یك سری توانی منسوب‌کنیم. مثلا فرض‌کنید یك سری مثلثاتی کلی چون $\sum c_n e^{inx}$ داریم. فرض‌کنید $c_{-n}=c_n$ ؛ دراین صورت این سری را می‌توان به‌صورت $(۱/۲)a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)$ نیز نوشت، که نمایانگر بخش حقیقی سری‌توانی $(۱/۲)a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n-ib_n)e^{inx}$ است. به‌بیان دیگر، کارکردن باسریهای مثلثاتی به‌عنوان بخش حقیقی سریهای توانی دست ما را در به‌کاربستن روشهای متغیرهای مختلط به‌سادگی بازمی‌گذارد. می‌دانیدکه توابع تحلیلی خواص بیشماری دارند، ویکی از کارهای اصلی مکتب روسی بررسی بسیار جامعی بود که در مورد خواص مقدار کرانه‌ای توابعی تحلیلی که درقرص یکه تعریف شده‌اند به عمل‌آوردند. نتایج اصلی این بررسی چه

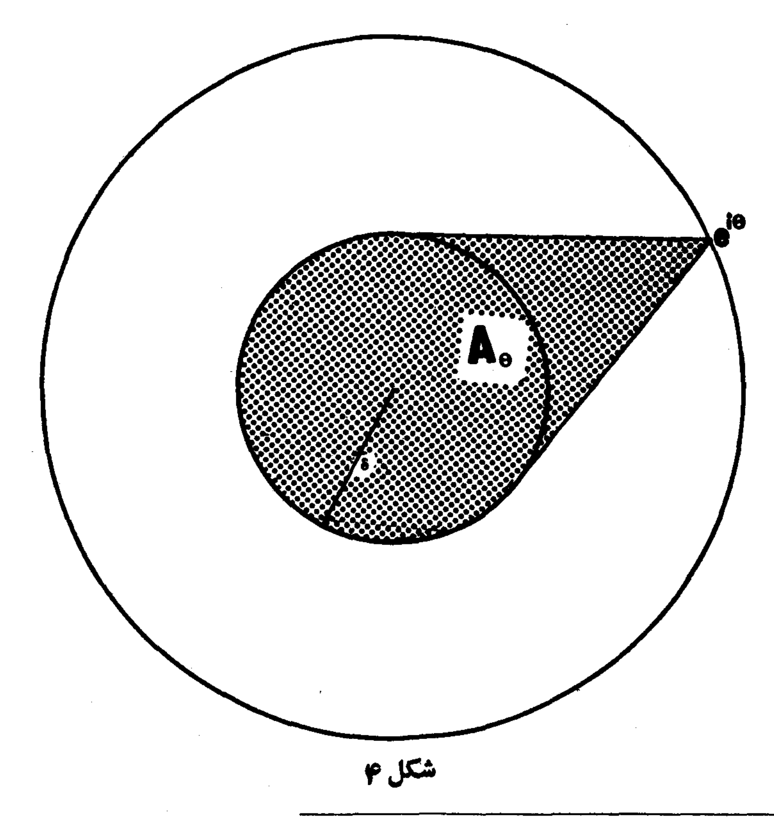
---

1. Parseval
2. Menshov

بود؟ یکی نتیجهٔ پریوالوف در مورد $\tilde{f}$ بودکه در بالا در ارتباط با توابع مزدوج به‌آن اشاره‌کردیم. پیشرفت دیگر به‌دست خود لوزین بود. پیش‌از اومعمولاگرایش شعاعی یا غیر مماسی به‌کرانه را درنظر می‌گرفتند. حال فرض کنید مثلا $\varphi(z)$ی داریم‌که درون قرص یکه تعریف شده است. لوزین نخستین‌کسی بودکه مفهوم جدیدی راکه اصطلاحاً تابع مساحت خوانده می‌شود معرفی‌کرد. $0<\delta<1$ را ثابت می‌گیریم (شکل ۴)، وفرض می‌کنیم A_θ ناحیهٔ هاشورخورده باشد. دراین صورت تابع مساحت با

$$S(\theta)=\int_{A\theta} |\varphi'(z)|^{2}\, d\sigma$$

تعریف می‌شود. لوزین نشان دادکه هرگاه $\varphi(z)=\sum c_n z^n$ و $\sum|c_n|^{2}<\infty$،آنگاه تابع بالا به‌ازای تقریباً هر θ متناهی است. امروزه می‌دانیم‌که متناهی بودن این انتگرال به‌ازای یك سری مثلثاتی کلی، معادل است با وجود حد غیرمماسی[1] (مگر درمجموعه‌ای از θها با



شکل ۴

۱. هرگاه ناحیهٔ هاشورخوردهٔ شکل ۴ را $A(\theta,\delta)$ بنامیم، بنابه‌تعریف می‌گوییم φ درنقطهٔ $e^{i\theta}$ دارای حدغیرمماسی ϕ است، اگر به‌ازای‌هر $0<\delta<1$ و هردنبالهٔ (z_n) ازنقاط $A(\theta,\delta)$ ←

اندازهٔ صفر)؛ و بدینسان تابع مساحت به‌ابزار بسیار مهمی در مطالعهٔ سریهای مثلثاتی مبدل شده است.

۴. مجموعه‌های یکتایی و چندگانگی

اکنون ببینیم که منشوف دراین میان چه‌کرد. کارهای او با مسائل یکتایی سروکار داشت. و. ه. یانگ با تعمیم قضایای قبل نشان دادکه هرمجموعهٔ شمارشپذیر یك مجموعهٔ یکتایی است. در اینجا بودکه سؤالی‌کاملا طبیعی پیش‌آمد، وآن اینکه درمورد مجموعه‌هایی‌که یکتایی نیستند چه می‌توان‌گفت. منشوف اولین‌کسی بودکه ثابت‌کرد مجموعه‌هایی بااندازهٔ صفر ــ وحتی‌کامل ــ وجود دارندکه مجموعهٔ یکتایی نیستند. او بررسی مسائلی راآغازکرد که هنوزخیلی زود است کارشان را تمام شده بدانیم. اوثابت‌کرد مجموعه‌هایی یکتایی با توان پیوستار (ولی لزوما با اندازهٔ صفر) وجود دارند. اما حتی هنوزهم برما معلوم نشده است‌که چه مجموعه‌هایی با اندازه صفری از این ویژگی برخوردارند. خود منشوف نشان داد مجموعه‌های خاصی با اندازهٔ صفرهستندکه مجموعهٔ یکتایی نیستند. به‌بیان دیگر، اینها مجموعه‌های چندگانگی‌اند، به‌این مفهوم‌که سری مثلثاتی‌ای وجود داردکه خارج آنها به صفرمی‌گراید اما متحد با صفرنیست.

درضمن مطالب بالا مؤیدآن‌است‌که پیشرفت دراین زمینه درمقایسه بازمینه‌های دیگر ازموفقیت نسبی‌کمتری برخوردار بوده است. دیریکله وریمان سریهای مثلثاتی را به‌سوی نظریهٔ توابع یك متغیرحقیقی سوق دادند. لکن بررسیهای مکتب روسی،که برمبنای‌کارهای فاتو بود، سریهای مثلثاتی را به‌حوزهٔ متغیرهای مختلط‌کشانید. با تمام این حرفها، سریهای مثلثاتی ارتباطات بیشتری با حوزه‌های دیگر ریاضیات، به‌ویژه نظریهٔ اعداد، پیداکرده‌اند. هرگاه‌سری مثلثاتی $\sum c_n e^{inx}$ رادرنظربگیریم، خواهیم دیدکه آنچه دراینجاواقعاً مهم‌است، رفتارحاصل‌ضرب nx به‌هنگ 2π است. به عبارت دیگر، سریهای مثلثاتی، تاآنجاکه به رفتارشان مربوط می‌شود، بستگی شدیدی با خواص دیوفانتی اعداد دارند. تا به‌حال نتایج خاص بسیار درخشانی دراین باب به‌دست‌آمده است[۱]، اما این موضوع درمقایسه بامباحث دیگرکمترثمربخش بوده (به‌گمانم این احساس شخصی خود من باشد) ومحتملا پژوهشهای آینده به‌آن‌تعلق خواهد داشت. درواقع‌کاربردهای زیادی ازسریهای مثلثاتی درنظریهٔ‌اعداد وجود دارد؛ برای نمونه می‌توان آنها را درکارهای‌وینوگرادوف[۲] یافت. لکن کاربردهای نظریهٔ اعداد درسریهای مثلثاتی نسبتاً ناچیز است.

→

که به $e^{i\theta}$ میل کند داشته باشیم $\lim_n \varphi(z_n) = \phi$. برای ملاحظهٔ بحث کوتاه ولی بسیار جالبی در این باره به

Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 3d ed. McGraw–Hill Book Co., 1986, 239–245

رجوع کنید.ــم.

۱. یك نمونهٔ خوب، قضیهٔ زیرازسلم(Salem) و زیگموند است: با مفروض بودن $\xi < 1$،

←

۵. درونیابی عملگرها

قضیهٔ پارسوال می‌گوید

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 dx$$

همچنین نامساوی زیر بدیهی است

$$|c_n(f)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|dx$$

بنابراین در مورد ضرایب فوریهٔ توابعی‌که در L^2 و نیز L^1 اند، چیزهایی می‌دانیم. اما مسئله این است: درمورد توابعی‌که در L^p اند، هنگامی‌که p لزوماً ۱ یا ۲ نیست، چه می‌توان گفت؟ حکم اساسی در اینجا چیزی است‌که اصطلاحاً قضیهٔ هاوسدورف ـ یانگ خوانده می‌شود. بااستفاده ازنرمهای

$$\|c\|_p = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^p\Big)^{1/p} \quad \text{و} \quad \|f\|_q = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^q dx\Big)^{1/q}$$

این قضیه اساساً می‌گوید‌که

$$\|c\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$$

که در آن p عددی بین ۱ و ۲، و $p' = p/(p-1)$ اندیس مزدوج p است (به‌طوری‌که $1/p + 1/p' = 1$). این بخشی از قضیهٔ هاوسدورف‌ـ‌یانگ است. یادم می‌آید هنگامی که مقالهٔ هاوسدورف را می‌خواندم (من هیچوقت مقالهٔ یانگ را نخواندم ـ او این قضیه را تنها برای مقادیرخاصی از p ثابت‌کرد)، به‌شدت تحت تأثیر آن قرارگرفته بودم، اما هرگز آن را نفهمیدم، چراکه مقاله‌ای بسیارتکنیکی بود. در واقع، ظرافت و عمق استدلال

→

"مجموعهٔ کانتور" C_ξ را بر $[0, 2\pi]$ چنین تشکیل می‌دهیم‌که ابتدا بازهٔ بازی به‌طول $2\pi/\xi$ از وسط آن برمی‌داریم، سپس بازه‌های بازی به‌طول $2\pi/\xi^2$ از وسط هر یك از بازه‌های بستهٔ حاصل حذف می‌کنیم، این کار را تکرارمی‌کنیم. دراین صورت C_ξ (که ازاندازهٔ صفر است) یك مجموعهٔ یکتایی است اگر و تنها اگر ξ یك عدد صحیح جبری باشد که همهٔ مزدوجهایش قدرمطلقی‌کوچکتر از ۱ داشته باشند (یعنی‌کوچکترین عدد صحیح n، و اعداد صحیح $a_1, a_2, \dots, a_n$ ی وجود دارند به طوری که $\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \dots + a_n = 0$، وبقیهٔ $n-1$ ریشهٔ $x^n + \dots + a_n = 0$ قدرمطلقی کوچکتر از ۱ دارند). درحالت‌خاص، مجموعهٔ‌کانتور کلاسیك C_3 یك مجموعهٔ یکتایی است، حال آنکه مجموعهٔ «شهوداً نحیفتر» $C_{5/2}$ چنین نیست. به‌اعتقاد من، این نتیجه‌ای بسیار شگفت‌انگیز است.ـ ویراستار انگلیسی.

2. Vinogradov

او تحسین‌کردنی بود، اما نمی‌شد گذر از ۱ و ۲ به p کلی را حقیقتاً درك کرد (این احساس خود من است).

برهان جدیدی بر این‌قضیه را مارسل ریس ارائه داد. این اثبات نیز پیشرفت بسیار مهمی درنظریهٔ آنالیز تابعی بود. ریس نشان داد که قضیهٔ هاوسدورف ـ یانگ صرفاً حالت خاصی از یك قضیهٔ بسیارکلی درباب درونیابی عملگرهای خطی است. اثبات او نــه تنها به خاطر این حــالت خــاص حائز اهمیت بود، بلکه ازاین جهت مورد توجه قرارگرفت کــه دیدگاهی کاملاً کلی درموردکاربردهای نظریهٔ عملگرها به‌دست می‌داد. اینك، هرگاه دونامساوی بین نرمها (مثلا $\|c\|_2 \leqslant \|f\|_2$ و $\|c\|_\infty \leqslant \|f\|_1$) را درنظر بگیریم، می‌توانیم به‌پیروی از روش مــارسل ریس بــه‌طور تقریبــاً خودکار بین این دومقدار درونیــابی‌کنیم (یعنی $\|c\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$ را به‌دست آوریم). به‌اعتقاد من (البته هرکس برای‌خودش عقیده‌ای دارد) این قضیه یکی‌ازجالبترین وبرجسته‌ترین نتایج درآنالیز است، ولو اینکه تنها به‌خاطر نشان دادن دیدگاهی کلی چنین باشد.

در همین باب به‌قضیه‌ای از مارکینکیویچ برمی‌خوریم. قضیهٔ مارسل ریس با وجود اهمیتش همواره قابل استفاده نیست، زیرا گاهی اوقــات نتیجهٔ حاصل از درونیابی صوری بین دو نامساوی برحسب نرمها درست است، بی‌آنکه خود آن دو نامساوی برقرارباشد. به بیان دیگر، ممکن است تابع مورد نظر لزوماً درمفروضات قضیهٔ مارسل ریس صدق نکند، ولی نتیجهٔ قضیه باز هم درست بــاشد. این مارکینکیویچ بود کــه قضیه‌ای خیلی کلیتر در این‌باره به‌دست آورد. قضیهٔ او نه فقط به‌خاطر کلیتش جالب است، بلکه ازاین‌جهت مهم‌است کــه در اثبات مارسل ریس، متغیرهای مختلط نقش بیش از انــدازه مهمی دارد. شما واقعاً نمی‌فهمیدکه چــه اتفاقی دارد می‌افتد. قضیهٔ سه دایره را به‌کارمی‌برید ومی‌بینیدکه نتیجه به طورشسته ورفته به‌دست‌می‌آید. ولی‌حقیقتاً چه‌رخ‌می‌دهد؟ نمی‌دانید. اما اثبات مارکینکیویچ این برتری را داردکــه درآن می‌توان‌آشکارا دیدکه چه بخشهایی از توابع در نتیجهٔ کار سهیم‌اند.[۱]

۶. قضیهٔ ماکسیمال هاردی ولیتلوود

این قضیه· اهمیتی قــابل ملاحظه و ماندگار دارد، و معرف دیدگاهی است‌که در بسیاری پیشرفتهای‌آنالیزدخیل بوده‌است. تابع موضعاً انتگرالپذیر یك‌متغیرهٔ $f(x)$، ومقدارمیانگین آن یعنی

$$\frac{۱}{۲h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt$$

---

۱. پروفسور زیگموند خود ازجمله کسانی است که روش‌مارکینکیویچ را تکمیل کرده‌اند. به‌مقالهٔ
Zygmund, A.; "On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operators," *J. Math. Pures. Appl.* 35(9), 1956, 223-248
رجوع کنید.ـم.

را درنظرمی‌گیریم. می‌دانیم‌که با میل h به ۰، این انتگرال (هرگاه f صرفاً در L^1 باشد، تقریباً همه‌جا) به $f(x)$ میل می‌کند؛ لکن اندیشهٔ هاردی و لیتلوود این بود که به‌جای حد گرفتن، تابع

$$\sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|dt$$

را درنظر بگیرند. این همان است که اصطلاحاً تابع ماکسیمال هاردی و لیتلوود خوانده می‌شود. آنها نتایج بسیارجالبی در مورد این تابع به‌دست‌آوردند. کارکردن بااین تابع به مراتب ساده‌تر ازتابع حدی است. هاردی و لیتلوود چندخاصیت اساسی این تابع ماکسیمال را ثابت‌کردند، خواصی‌که بعدها به‌ابعاد بالاتر تعمیم پیداکردند و همان‌گونه‌که می‌دانیم امروزه نقش مهمی درآنالیز نوین بازی می‌کنند.[1]

ضمناً باید حقیقتی را بگویم‌که محتملا تابه‌حال ازنظرها پوشیده مانده است. اندیشهٔ درنظرگرفتن سوپرموم به‌جای حد، وبه‌بیان دیگر درنظرگرفتن عبارتی مثل $S_{n(x)}(x)$ به جای $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$، اساساً در مقاله‌ای قدیمی ازهرمان وایل آمده است،که درآن او همگرایی سریهایی متعامد را درنظر می‌گیرد [۱]. متأسفانه آن مقاله جوهرگرانقدر این اندیشه را به‌اندازهٔ کافی نشان نمی‌دهد.

من ازچندقضیه ازهاردی و لیتلوود نام بردم بی‌آنکه صورت هیچ‌یك ازآنها را بیاز کنم. دراینجا اجازه می‌خواهم‌که وارد جزئیات نشوم، اما درپایان مایلم موضوعی را ذکر کنم‌که درجوانی خیلی به‌آن علاقه‌مند شده بودم، و باکمال تأسف این علاقه بعدها به‌هیچ نتیجه‌ای نرسید. آن موضوع، مسئلهٔ همگرایی ورفتار یك‌سری متعامدکلی است. بین سالهای ۱۹۱۰ تا ۱۹۳۰ مقالات متعددی دربارهٔ سریهای متعامدکلی مانند $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$، معمولا با فرض اینکه $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<\infty$، نوشته می‌شد. ویژگی این سریها چه بود؟ اگر درست به‌خاطر بیاورم، امید می‌رفت‌که با حل مسئلهٔ همگرایی سریهای متعامدکلی بتوان مسئلهٔ متناظرش را برای سریهای مثلثاتی، که البته مسئلهٔ اصلی بود و هرکس دوست داشت آن را حل‌کند، خودبه‌خود حل‌کرد. به‌دلایلی‌آن روزها هنوزکاملا نفهمیده بودندکه چنین امیدی‌آن‌قدرها بجا نیست، چراکه مفهوم یك دنبالهٔ متعامد کلی مستقل از ترتیب است. به عبارت دیگر، هرگاه قضیه‌ای راجع به‌سریهای‌متعامدکلی ثابت می‌کردیم، آنگاه می‌توانستیم قضایای متناظری برای سریهای مثلثاتی با ترتیب دلخواه به‌دست‌آوریم. یعنی می‌توانستیم چیزی درباب همگرایی نامشروط سریهای فوریه ثابت‌کنیم. این مبحث تنها همین اواخر به‌طور صریح مطرح شده است، ومحتملا یکی از مباحثی است‌که در آینده به‌آن خواهند

---

۱. درابعاد بالاتر، گوی $B(x,h)$ جای بازهٔ $[x-h\ ,\ x+h]$ را می‌گیرد، و $2h$ با $\mu(B(x,h))$ عوض می‌شود. نقش مهمی‌که نویسنده به‌آن اشاره می‌کند، مثلا ناشی از قابلیتی است‌که این تابع در بررسی مشتقات توابع روی فضاهای اقلیدسی، از دیدگاه نظریهٔ اندازه دارد. مفهوم نقطهٔ‌لبگی نیز ازهمین تابع الهام‌گرفته شده است.ـم.

پرداخت! مثلا یك سؤال این است که هرگاه ترتیب جملات یك سری مثلثاتی را به‌نحوی دلخواه تغییردهیم، ویژگیهای همگرایی آن چه خواهد بود؟ دراین مورد برخی نتایج منفی دردست است. فکرمی‌کنم زاهورسکی[1] بودکه در ۱۹۶۰ ثابت‌کرد سری فوریهٔ یك تابع در L^2 ممکن است با تجدیدآرایش مناسب جملاتش تقریباً همه‌جا واگرا شود.

اما نتایج قطعی بسیارنادرند. اینك این پرسش پیش می‌آیدکه هدف از این همه پژوهش درباب همگرایی نامشروط چیست؟ این بستگی به‌سلیقهٔ افراد دارد. ومن؟ من هم آن را می‌پسندم، واین پایان سخن است.

مراجع

1. Jerosch, F. , and H. Weyl, “Uber die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten,” *Math.Ann.*, **66** (1909), 67-80.
2. Zygmund, A., *Trigonometric Series*, 2nd ed., Cambridge University Press, New York, 1959.

---

1. Zahorski